70, 單葉函数ニ就テ

檜垣宣明、鍋谷聖次郎（東北大）

先日檜垣君ガ私ノ次ノ様ナ考ヘヲ話サレマシタ、ソレハ單位円ヲソノ内部及ビ周上ニ於テ正則ナ函数ニヨリ一ツノ星型領域ニ描寫シタトキ、ソノ星型領域ノ窪ンダ点ノ数ヲ調ベルコトガ出来ナイダラウカト云フノデスガ此ノ考ヘガ面白カッタノデ一緒ニ考ヘテ居ル中ニ次ノ様ナ一結果ニ到達シマシタ、

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$$

ヲ單位円内デ正則デ $\frac{f(z)}{z} \neq 0$, $f'(z) \neq 0$

デアルトシマス、w 平面ノ原点カラ出ル Radius-Vektor ト $|z| = r$ $(0<r<1)$ ニ対応スル曲線 C_r トノ交点ニ於ル C_r ノ normal トソノ Radius-Vektor ノナス角ハ $\operatorname{amp} \frac{zf'}{f}$ デ表ハサレマス、故ニ Radius-Vektor ト normal ガ重ナル点ハ即チ

$$\operatorname{amp.} \frac{zf'}{f} = 0$$

ナル点デス、此ノ様ナ点ヲ今假ニ C_r ノ頂点ト呼ンデオキマセウ、

$$W = \frac{zf'}{f} = 1 + b_2 z + \cdots$$

單位円内デ正則デ 0 ナル値ヲ取リマセン、従ッテ W 平面ニ於ル $|z| = r$ ニ対応スル曲線ハソノ内部ニ $W = 1$ ナル点ヲ含ミ $0, \infty$ ナル点ハソノ外部ニアリマス、故ニ此ノ曲線ト区間 $(0, 1)$ 及ビ $(1, \infty)$ ハ夫々少クトモ一点ヅツ交点ヲ有シマス、故ニ我々ノ考ヘル $w = f(z)$ ニ対シテハ任意ノ C_r $(0<r<1)$ ニ対シテ頂点ガ少クトモ二ツアルコトガ分リマス。次ニ $w = f(z)$ ガ如何ナル條件ヲ有スルトキニ任意ノ r ニ対シテ頂点ノ数ガ丁度二ツアルカト云フ問題ニ対シテハ、勿論必要ニシテ且十分ナ條件ハ容易ニハ求マラナイデセウガ次ノ様ナ充分條件モ面白イデセウ、ソレハ $|z| < 1$ ニ対応スル W 平面ニ於ル領域ガ $W = 1$ ニ関スル星型領域ナラバ $|z| =$ 12 P

対応スル曲線ト実軸トノ交点ハ丁度二ツデスカラ従ッテ C_r 上ノ頂点ノ数ハ二デアルト云フコトニナリマス、コレヲ $f(z)$ ニ対スル条件デ表ハスナラバ

$$\Re\left\{\frac{z\frac{d}{dz}\left(\frac{zf'}{f}-1\right)}{\frac{zf'}{f}-1}\right\} = \Re\left\{\frac{\frac{zf'}{f}\left(1+\frac{zf''}{f}-\frac{zf'}{f}\right)}{\frac{zf'}{f}-1}\right\} > 0$$

トナリマス。尚 $\frac{zf'}{f}$ ガ z ノ実軸上ノ点而シテ実軸上ノ点ニ対シテノミ real 値ヲ取ル函数デアルト云フコトガ一ツノ十分条件デアルコトモ容易ニ分リマス。函数 $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ ハ上ノ二条件ノ孰レニモ適合シテ居マス、又 $f(z)\equiv z$ ニ就テハ C_r 上ノ点ガ總テ頂点ニナッテ居ルコトモ注意スベキデス。序ニ初ニ考ヘタラニ $f(z)$ ニ更ニ odd ト言フ条件ヲ附ケ加ヘルト任意ノ r ニ対シテ頂点ノ数ガ少クトモ四ツアルコトモ容易ニ分リマス。次ニ $f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$ ガ単位円内デ正則且単葉ナルトキハ

$$\left|\log\frac{zf'}{f}\right| \leqq \log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

ナル不等式ガ成立スルコトハ H. Grunsky ガ彼ノ Dissertation デ証明シテ居す。其処ニハ $|t|=1$ ニ対シテ

$$\log\frac{zf'}{f} = t\log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

トナル様ナ凡テノ函数ガ示サレテ居マスガ $t=i$ トスルナラバ

$$\mathrm{amp.}\,\frac{zf'}{f} = i\log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

トナル様ナ函数 $f(z)$ モアルワケデスカラ

$$\left|\mathrm{amp.}\,\frac{zf'}{f}\right| \leqq \log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

ナル不等式モ best possible ナ一ツデアルコトガ分リマス

以上述ベタ事ニ関聯シテ尚種々ノ問題ガ出テ来ルコトト思ハレマスガ今ハ未準備中デス。

（12 11 受取）